

Atividades sobre comparação de área de figuras planas: análise de uma coleção de livros didáticos de matemática do ensino fundamental anos iniciais

Activities on comparing the area of flat figures: analysis of a collection of mathematics textbooks from the early years of elementary school early years

Franklin Fernando Ferreira Pachêco
Universidade Federal de Pernambuco
pacheco.franklin9@gmail.com

Josinaldo José da Silva
Universidade Federal da Paraíba
josinaldoj25@gmail.com

Gustavo Adalberto de França Silva
Secretaria do Estado de Pernambuco
gustavoadalberto2006@hotmail.com

Resumo: O objetivo da presente pesquisa foi analisar as atividades sobre comparação de áreas de figuras planas presentes em uma coleção de livros didáticos do ensino fundamental – anos iniciais. Abordou-se a ideia de área como grandeza autônoma proposta por Douady e Perrin-Glorian. Além disso, o debate sobre as atividades de comparação de áreas de figuras planas foi apoiado pela ótica de Baltar. Em termos metodológicos, analisou-se uma coleção de livros didáticos do ensino fundamental – anos iniciais da disciplina de matemática. Os resultados mostram que existem poucas atividades sobre comparação de área de figuras planas. Elas, em sua maioria, estão ancoradas em procedimentos de resoluções numéricas, em especial, o ladrilhamento. Embora as técnicas geométricas (inclusão e sobreposição, decomposição e recomposição, e equidecomposição) estejam menos presentes, elas são relevantes por possibilitar a verificação de que as superfícies comparadas podem possuir área maior, menor ou igual.

Palavras-chave: Geometria; Grandezas e medidas; Matemática.

Abstract: The objective of this research was to analyze the activities on comparing the areas of plane figures present in a collection of elementary school textbooks - initial years. The idea of area as an autonomous magnitude proposed by Douady and Perrin-Glorian was approached. Furthermore, the debate on the activities of comparing areas of plane figures was supported by Baltar's optics. In methodological terms, a collection of elementary school textbooks – initial years of mathematics discipline – was analyzed. The results show that there are few activities about area comparison of plane figures. They, for the most part, are anchored in numerical resolution procedures, in particular, tiling. Although geometric techniques (inclusion and overlap, decomposition and recomposition, and equidecomposition) are less present, they are relevant for enabling verification that the compared surfaces may have greater, lesser or equal area.

Keywords: Geometry; Sizes and measures; Math.

Recebido em: 02/05/2021

Aceito em: 30/11/2022

Introdução

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017), o conceito de área de figuras planas deve ser trabalhado no ambiente da sala de aula a partir do 3º ano do ensino fundamental. Esse objeto matemático, segundo Pachêco (2020), pode ser compreendido como sendo “uma propriedade das superfícies, as quais por sua vez podem ser poligonais ou de bordo curvilíneo” (p. 25). Por isso, na maioria das vezes, as atividades que envolvem a noção de área são trabalhadas em associação com superfícies planas. Diversas técnicas podem ser usadas para obtenção dos resultados, por exemplo, a decomposição e recomposição de superfícies, a inclusão e sobreposição de superfícies, a equidecomposição de superfícies, o ladrilhamento de superfícies e uso de fórmulas associado a forma da superfície.

As atividades sobre área de figuras planas podem ser exploradas por meio de quatro classes de situações: comparação de área, medida de área e produção de superfície (BALTAR, 1996) e mudança de unidade de área (FERREIRA, 2010). Para elaborar esses tipos de situações que dão sentido ao conceito de área de figuras planas, ambas pesquisadoras se apoiaram na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1990), e na abordagem de área enquanto uma grandeza autônoma de Douady e Perrin-Glorian (1989).

Dentre esses tipos de atividades, estudou-se a comparação de área de figuras planas sob a ótica do estudo de Baltar (1996). Para resolvê-las, de acordo com essa pesquisadora, é possível utilizar técnicas geométricas (inclusão e sobreposição, equidecomposição, decomposição e recomposição) e/ou técnicas numéricas (ladrilhamento, por exemplo), ou seja, ambas permitem verificar se as superfícies comparadas possuem ou não a mesma área. Diante disso, o objetivo da presente pesquisa foi analisar as atividades sobre comparação de área de figuras planas presentes em uma coleção de livros didáticos do ensino fundamental – anos iniciais.

Analisou-se a coleção de livros didáticos intitulada “Ligamundo: matemática do ensino fundamental – anos iniciais” da autora Eliane Reame. Optou-se por essa obra porque os seus conteúdos estavam de acordo com as habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2017).

Analisou-se livros didáticos porque eles servem de auxílio para o professor elaborar suas aulas, por exemplo. Além disso, eles ao apresentarem atividades fazem uso de situações

do cotidiano, “[...] associando-os ao conteúdo que está sendo abordado, conduzindo o leitor a reflexão do porquê se estudar determinado conceito” (PACHÊCO; SILVA, 2019, p. 2).

No próximo tópico, debateu-se a área enquanto uma grandeza geométrica (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989), bem como a situação de comparação de área de figuras planas (BALTAR, 1996). Em seguida, apresentam-se os procedimentos metodológicos, após as análises e discussões dos resultados, considerações finais e referências.

Um estudo sobre a área de figuras planas e as atividades de comparação de área

A construção do conceito de área enquanto grandeza autônoma deve ocorrer de modo a articular e diferenciar três quadros: o geométrico, o numérico e o das grandezas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989). O “quadro geométrico é composto por figuras planas; o quadro numérico aborda as medidas das áreas das superfícies; e o quadro das grandezas se destaca a noção de área abordando a classe de equivalência, isto é, a ideia de ter a mesma área” (PACHÊCO; SILVA, 2019, p. 3).

O estudo de Douady e Perrin-Glorian (1989) realizado com alunos franceses revelou que eles, quando confrontados com atividades sobre área de figuras planas, mobilizavam duas noções errôneas: I) não diferenciavam a área e o número. Eles não notavam que ao mudar a unidade de medida de área, ela pode ser representada por outro par (número, unidade de medida); II) não diferenciavam a área e a superfície. Eles associam que a área está atrelada ao formato da superfície, ou seja, não identificando que figuras diferentes podem ter a mesma área.

Apesar desse estudo ter sido desenvolvido há mais de 30 anos, ele se encontra presente nas pesquisas científicas que se debruçam sobre a área de figuras planas. Por exemplo, no contexto brasileiro algumas pesquisas (FERREIRA, 2010, PACHÊCO, 2020) apresentaram essas mesmas dificuldades por parte dos alunos quando lidam com atividades que envolvem o conceito de área.

Um prolongamento do estudo de Douady e Perrin-Glorian (1989) é realizado por Baltar (1996), quando propôs um conjunto de três situações (comparação de área, medida de área e produção de superfície) que dão sentido ao conceito de área. Elas possibilitam compreender em qual dos quadros (geométrico, numérico e grandezas) estão as atividades desse objeto matemático, bem como qual(is) procedimento(s) é/são possível(is) atribuir para resolvê-las. Quanto a isso, Bellemain e Lima (2002) apontam que

As situações de comparação se situam essencialmente em torno do quadro das grandezas. Quando comparamos duas superfícies somos conduzidos a decidir se elas pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência. É claro que, com frequência,

os quadros geométrico e numérico vão ser necessários para a resolução dos problemas de comparação, mas sua intervenção em geral é secundária com relação à do quadro das grandezas. Nas situações de medida, destacam-se o quadro numérico e a passagem da grandeza ao número por meio da escolha de uma unidade. O resultado esperado numa situação deste tipo é um número seguido de uma unidade. As situações de produção são diferentes das anteriores do ponto de vista da tarefa cognitiva do aluno. Enquanto nas situações de comparação e medida em geral há apenas uma resposta correta para cada situação, as situações de produção, frequentemente admitem várias respostas corretas. Além disso, apesar de a resposta esperada para uma situação de produção ser uma superfície (objeto geométrico), a intervenção dos outros quadros pode ser tão importante quanto a do quadro geométrico. (BELLEMAIN; LIMA, 2002, p. 45)

Além dessas situações, como já descrito na introdução, Ferreira (2010) incluiu a mudança de unidades de área como sendo integrante do quadro numérico. Para ela, a mudança de unidade permite a compreensão de que uma mesma área pode ser representada por par (número, unidade de medida) diferente. Ou seja, quando se altera a unidade de medida e a superfície não sofre variação de formato é possível a obtenção de um número seguido por uma unidade de medida diferente da anterior.

Embora todos esses tipos de situações sejam importantes para os alunos se apropriarem do conceito de área de figuras planas, enquanto uma grandeza autônoma (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989), este texto prezou pelo debate da atividade do tipo de comparação.

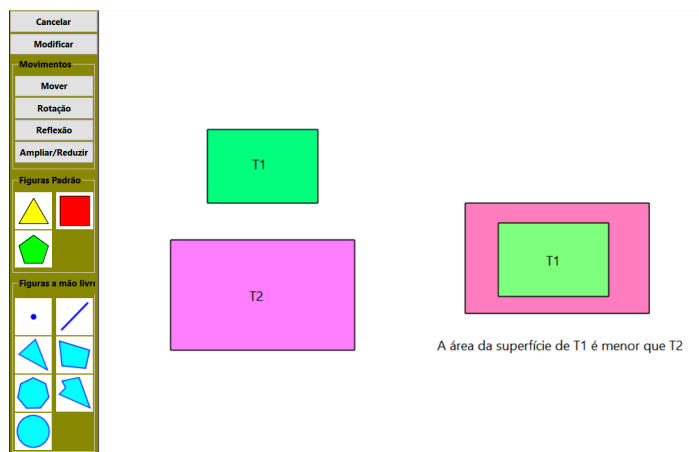
No estudo sobre atividades de comparação de áreas de figuras planas, de acordo com Baltar (1996), é essencial distinguir o total de superfícies que estão sendo comparadas: duas ou mais. Além disso, os resultados podem ser obtidos por meio da mobilização de técnicas geométricas (decomposição e recomposição, equidecomposição, inclusão e sobreposição) ou/e numérica (ladrilhos e fórmulas).

Para essa pesquisadora, esses tipos de atividades podem ser classificadas sob duas perspectivas, sendo elas: estáticas e dinâmicas. Denomina-se de estáticas quando as superfícies são submetidas a procedimentos matemáticos (decomposição e recomposição, por exemplo) e não alteram a sua área. Denomina-se de dinâmicas quando as superfícies são submetidas a procedimentos matemáticos e sofrem variação de área, seja por perda ou por ganho. Nos próximos parágrafos são elencados as estratégias de resoluções com ênfase geométrica.

Inclusão e sobreposição: Essas técnicas são trabalhadas de maneiras imbricadas. Por exemplo, ao se realizar a comparação de “[...] duas superfícies diferentes (T1 e T2), por meio de sobreposição, se T1 ficar totalmente inclusa em T2, conclui-se que T1 é menor que T2. Caso elas coincidam, as superfícies possuem a mesma área. Este tipo de situação está

associado com mais ênfase em aspectos geométricos” (PACHÊCO; SILVA, 2019. p. 4). Ilustrou-se esses procedimentos por meio da Figura 1.

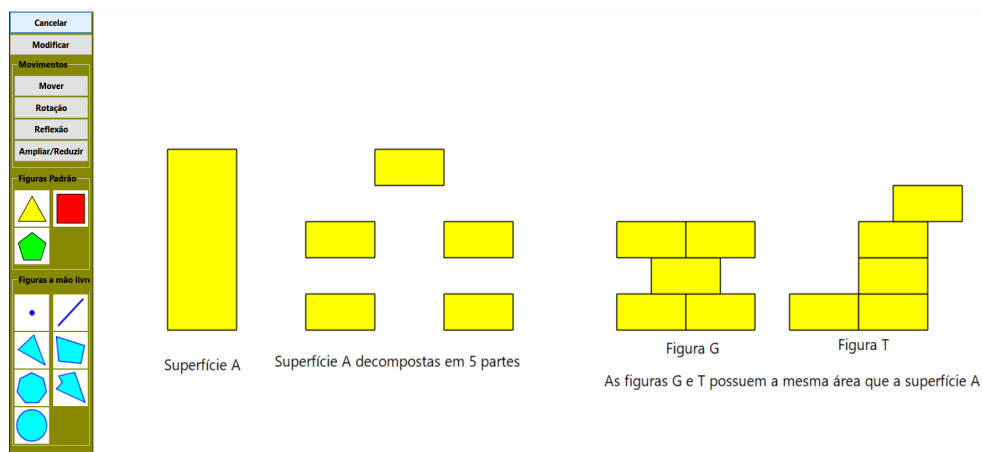
Figura 1 - Procedimentos de inclusão e sobreposição



Fonte: Elaborado pelos autores no *Apprenti¹Géomètre 2*

Equidecomposição: Ela “consiste na técnica de decompor superfícies em diversos pedaços e em seguida compará-las” (PACHÊCO; SILVA, 2019. p. 4). Essas informações estão representadas na Figura 2.

Figura 2 - Técnica da equidecomposição

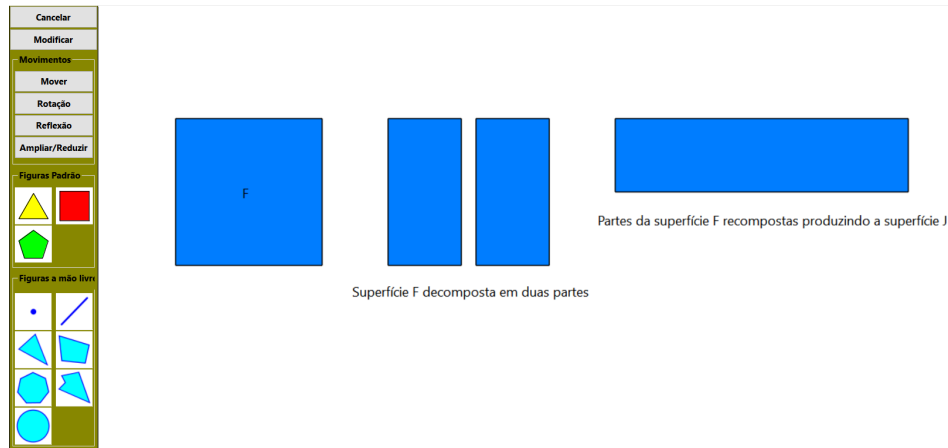


Fonte: Elaborado pelos autores no *Apprenti Géomètre 2*

Decomposição e recomposição: Elas são abordadas associadas, ou seja, deve-se primeiro “[...] decompor uma superfície em pedaços menores e posteriormente juntar seus pedaços produzindo superfícies de formatos diferentes, embora com a mesma área” (PACHÊCO; SILVA, 2019. p. 4). Esses procedimentos estão ilustrados a partir da Figura 3.

¹É um *software* grátis e adaptável a multiplataformas. Ele foi criado pelo Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM), grupo belga de pesquisadores que estudam investigações sobre o ensino de Matemática.

Figura 3 - Decomposição e recomposição

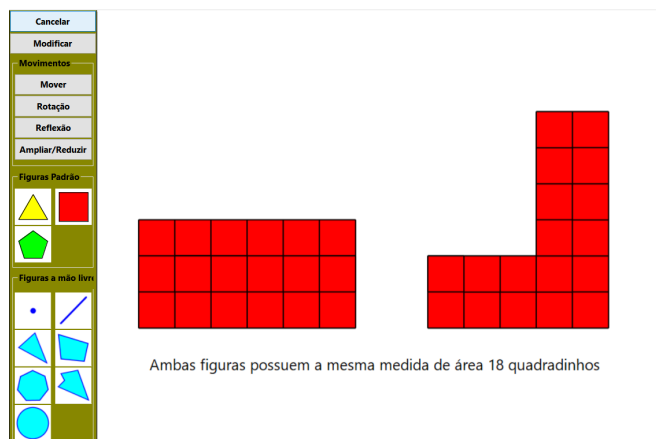


Fonte: Elaborado pelos autores no *Apprenti Géomètre 2*

Embora as técnicas geométricas sejam relevantes, concorda-se com Bellemain e Lima (2002) que ao realizar a comparação de área entre duas ou mais superfícies, o quadro mobilizado com preponderância é o das grandezas, mesmo que o quadro numérico e o quadro geométrico estejam presentes, pois o resultado é estimulado a decidir se as superfícies comparadas possuem áreas iguais ou distintas.

Além desses procedimentos é possível comparar a área de figuras planas por meio de estratégia numérica, por exemplo, o ladrilhamento. Essa técnica corresponde a adotar um tipo de unidade de medida e preencher as superfícies a serem comparadas, sejam duas ou mais, por fim contabilizar o total de ladrilhos que ambas possuem. Diante disso, torna-se possível enfatizar que a superfície com o maior quantitativo de ladrilhos possuirá a maior área, a superfície com menos ladrilhos terá menor área e se o total de ladrilhos coincidirem as superfícies comparadas terão áreas iguais (BALTAR, 1996). A Figura 4 exemplifica a igualdade de área.

Figura 4 - Comparação por estratégia numérica



Fonte: Elaborado pelos autores no *Apprenti Géomètre 2*

Conforme é possível observar na Figura 4, as duas superfícies possuem formatos distintos, porém tem a mesma área. Ambas possuem uma área de 18 quadrados.

Quando o procedimento é mediado por uso de fórmula, a princípio é necessário o cálculo da área da figura plana para a obtenção do par (número, unidade de medida). O par de cada superfície será comparada e identificada em: maior, menor ou igual.

Este texto se apoiou em todos esses procedimentos de resoluções para analisar quais são os explorados nas atividades sobre comparação de área de figuras planas propostas na coleção de livros didáticos do ensino fundamental - anos iniciais. O próximo tópico apresentou os procedimentos metodológicos.

Procedimentos Metodológicos

Esse texto se concentrou na análise de atividades sobre comparação de área de figuras planas da coleção de livros didáticos intitulada de Ligamundo²: matemática, destinada para o ensino fundamental - anos iniciais, produzida pela autora Eliane Reame. Essa obra, que foi aprovada pelo PNLD 2019, encontra-se em sua 1ª edição, pela editora Saraiva, 2017.

Dentre os diversos tipos de pesquisa, de acordo com Gil (2002), este texto se enquadra como pesquisa documental. Embora exista semelhança com a pesquisa bibliográfica que “se utiliza fundamentalmente das contribuições dos diversos autores sobre determinado assunto” (p. 45), a pesquisa do tipo documental tem o enfoque nos “materiais que não recebem ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetos da pesquisa” (p. 45).

Os resultados foram categorizados em duas etapas: Na primeira etapa, quantificou-se o total de atividades de área nos livros didáticos. De modo específico, identificou-se as que correspondiam a comparação de área de figuras planas. Para isso, analisou-se todos os capítulos dos livros didáticos, ou seja, optou-se por não restringir as buscas das atividades apenas nos capítulos de geometria e das grandezas e medidas.

Na segunda etapa, identificou-se nos enunciados das atividades de comparação de área de figuras planas a técnica de resolução para a obtenção do resultado. Essa abordagem possibilitou a identificação de quais técnicas (geométricas ou numéricas) são as mais exploradas nesses tipos de atividades. Os resultados constam no próximo tópico.

² Esse material pode ser acessado e/ou baixado gratuitamente pelo site do e-docente. Seu endereço eletrônico é: <https://www.edocente.com.br/pnld/2019/>

Resultados e Discussão

Como descrito nos procedimentos metodológicos, os resultados foram organizados por meio de duas etapas. No quadro 1, expõe-se os dados da primeira etapa.

Quadro 1 - Análise do quantitativo de atividades de área e de situações de comparação de área

Livros didáticos	3º ano	4º ano	5º ano
Total de atividades de área	5	12	14
Total de atividades sobre comparação de áreas	2	2	2

Fonte: Dados da pesquisa

Como os livros didáticos seguem as recomendações da BNCC (BRASIL, 2017), eles propõem a abordagem do conceito de área de figuras planas a partir do 3º ano do ensino fundamental (PACHÊCO, 2020).

Verificou-se que os livros didáticos apresentam uma vasta diversidade de atividades sobre área de figuras planas: comparação, medida, mudança de unidade e produção de superfícies. Ao considerar que é nos anos iniciais que o conceito de área é integrado no ambiente da sala de aula, existe pouca atividade de comparação de área de figuras planas. Resultado esse que pode ser observado por meio do Quadro 1.

Partindo-se desses dados, discutiu-se a segunda etapa dos resultados. Para isso, adotou-se as estratégias de resoluções elencadas por Baltar (1996). Os resultados constam no Quadro 2.

Quadro 2 - Estratégias de resolução sobre as atividades de comparação de áreas de figuras planas

Livros didáticos	3º ano	4º ano	5º ano
Total de atividades sobre comparação de áreas	2	2	2
Estratégias geométricas	Decomposição; Recomposição; Sobreposição	-----	-----
Estratégias numéricas	Contagem do total de ladrilhos e após realiza-se a comparação das superfícies	Contar a quantidade de ladrilhos e a partir da medida obtida comparar as superfícies	Medição das superfícies (quantidade de ladrilhos), e após comparar as áreas


Fonte: Dados da pesquisa

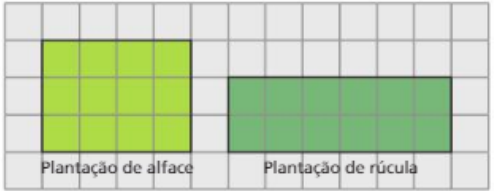
De acordo com as informações do Quadro 2, as atividades de comparação de áreas de figuras planas presentes na coleção de livros didáticos estão ancoradas com mais ênfase em procedimentos de resolução numérica: ladrilhamento. Nelas, notou-se que a malha quadriculada é um recurso presente para a obtenção do par (número, unidade de medida) e verificação da igualdade ou não da área.

De forma a ilustrar esse contexto, expõe-se a Figura 5, que contempla uma atividade do livro do 4º ano do ensino fundamental. Nela, a malha quadriculada é um recurso que permite o usuário do livro didático a obtenção do resultado de maneira mais prática, ou seja, ao considerar o quadradinho (da própria malha) como unidade de medida é possível notar que ambas as superfícies (quadrado e o retângulo) possuem a área de 12.

Figura 5 – Atividade sobre comparação de área de figuras planas.

Joelma mora em um sítio no interior de Minas Gerais.

1 Observe o desenho que ela fez em um papel quadriculado da região ocupada pelas plantações de verduras em terrenos retangulares. Joelma considerou a área do  como unidade de medida de área.



O que você pode dizer em relação à medida da área dos dois terrenos com plantações de verduras? **As medidas das áreas são iguais.**

Fonte: Reame (2017, p. 183).

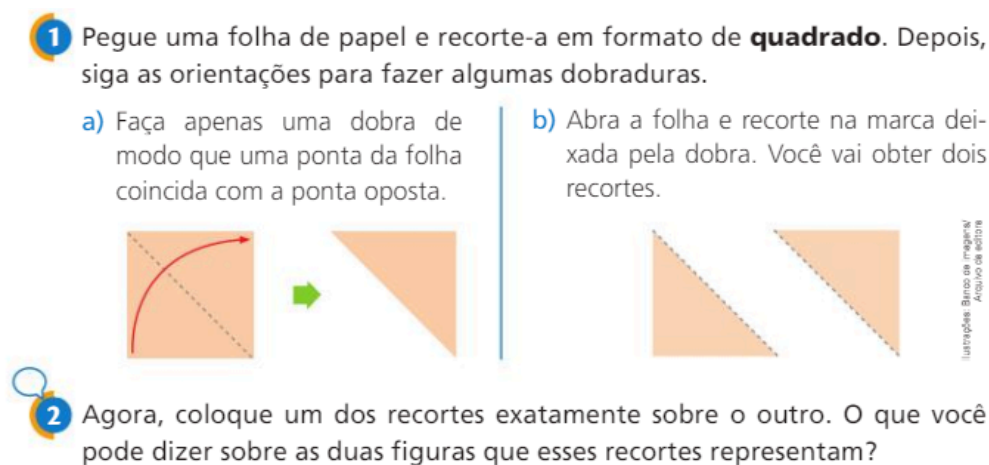
Cabe destacar que as duas superfícies expostas na Figura 5 possuem formatos distintos, porém dispõem de mesma área. Essa abordagem permite a reflexão de que a área e a superfície são objetos matemáticos diferentes, mas estão associados (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

Verificou-se que técnicas geométricas (inclusão e sobreposição, equidecomposição, decomposição e recomposição) são menos exploradas nas atividades de comparação de área de figuras planas. Entende-se, portanto, que a pouca ênfase dessas estratégias de resoluções pode propiciar para o aluno o entendimento de que o estudo da área de figuras planas está atrelada com apenas a ênfase numérica, algo que na prática não ocorre.

Diante disso, compreende-se a relevância do uso de técnicas geométricas para a compreensão desse objeto matemático enquanto uma grandeza autônoma. Para que isso ocorra, é relevante a articulação e a diferenciação entre o quadro geométrico, o quadro numérico e quadro das grandezas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

Cabe destacar que apenas no 3º ano do ensino fundamental as atividades mobilizam técnicas geométricas: sobreposição, decomposição e recomposição. Apesar disso, notou-se a ausência da inclusão e da equidecomposição. Nesse ano escolar, foi observado que os enunciados das atividades apresentam explicitamente o termo área, como é possível ver na Figura 6.

Figura 6 - Uso de estratégias geométricas



Fonte: Reame (2017, p. 212).

Na primeira questão, por exemplo, encontra-se a noção da decomposição e recomposição. Na segunda questão, além da decomposição e recomposição, aborda-se a noção da sobreposição. Sobre a segunda questão, a autora da obra destaca que o professor

Pergunte aos alunos quais figuras geométricas planas aparecem representadas após o recorte: dois triângulos e um retângulo. Por sobreposição, os alunos podem comparar os dois triângulos e concluir que eles têm a mesma área. É provável que os alunos digam que “os triângulos são iguais”, o que é aceitável no 3º ano. (REAME, 2017, p. 212)

Diante do exposto nessa seção, concorda-se com a perspectiva de Douady e Perrin-Glorian (1989) que o trabalho com a área de figuras planas não deve ocorrer de forma mais profunda apenas pelo quadro numérico. O uso exagerado de técnicas numéricas (ladrilhamento, aplicação de fórmulas, por exemplo) pode estimular a compreensão para o aluno que área e número são objetos matemáticos iguais.

Diante do exposto, entende-se que as técnicas geométricas também contribuem para a abordagem da área enquanto uma grandeza geométrica. Sendo assim, é relevante usá-las com maior frequência nas aulas.

Considerações Finais

Os resultados mostram que os livros didáticos dispõem de poucas atividades de comparação de área de figuras planas, cuja técnica mais adotada é a do ladrilhamento.

Notou-se que a coleção de livro didático Ligamundo atende as habilidades da BNCC (BRASIL, 2017). Dentre os livros didáticos que apresentavam atividades sobre comparação de área de figuras planas, o único que aborda resoluções geométricas é o do 3º ano do ensino fundamental. Apesar disso, observou-se que o enunciado delas nem sempre estão explícitas que o objeto matemático a ser trabalhado se trata da área de figuras planas. Já nos demais anos escolares (4º e 5º ano), notou-se que o conteúdo trabalhado se encontra bem definido no enunciado das atividades.

Diante do exposto, sugere-se que outros estudos analisem de que maneira o objeto matemático “área de figuras planas” é abordado nos ensino fundamental – anos finais. Ou ainda, sugere-se a investigação de como alunos do ensino fundamental anos iniciais compreendem o conceito de área.

Referências

- BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d’aire de surfaces planes: une étude de l’acquisition des relations entre les longuers et les aires au collège.** 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática), Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1996.
- BELLEMAIN, P.; LIMA, P. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental.** Ed. Geral: John A. Fossa. Natal: SBHMat, 2002.
- BRASIL. **Base Nacional Curricular Comum- BNCC.** Brasília, 2017, p. 472.
- DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Un processus d’apprentissage du concept d’aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**, Rennes, v. 20, n.4, p. 1- 50, 1989.
- FERREIRA, L. F. D. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental:** estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais. 2010. 191f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- PACHÊCO, F. F. F.; SILVA, A. S. Atividades sobre comparação de áreas presentes em uma coleção de livros didáticos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental: um olhar sob os aspectos numéricos e geométricos. In: VI Congresso Nacional de Educação (VI CONEDU), 2019, v. 1. **Anais...** Fortaleza: Editora Realize, 2019, p.12.
- PACHÊCO, F. F. F. **O Apprenti Géomètre 2 como uma ferramenta tecnológica para a abordagem da grandeza área:** um estudo com licenciandos em matemática sob a ótica da gênese instrumental Recife, 2020. 204 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.
- REAME, E. **Ligamundo:** Matemática ensino fundamental anos iniciais. 1ª edição. São Paulo: Saraiva, 2017.

PACHÉCO, Franklin F.F.; SILVA, Jozinaldo J.; SILVA, Gustavo A.F.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.